UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y T. I.
Estructuras Discretas III (CI-2527)
Prof.: S, Carrasquel

Ene-Mar 2022

Práctica 05

Clases Laterales-Grupo de Transformación

1. Demuestre el Teorema de Lagrange: *sea H un subgrupo de un grupo finito G. Entonces el orden de H divide al orden de G.*

2. Sea $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ un grupo finito, $a, b \in G$, H un subgrupo de G, $H \preceq G$, se define relación $a \sim b \Longleftrightarrow ab^{-1} \in H$. Demuestre que

   (a) La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

   (b) Dé explícitamente la forma de las clases de equivalencia que genera la relación $\sim$

   (c) Demuestre que $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$ o $Ha_i = Ha_j$ si $i \neq j$.

   (d) Demuestre que H y $[a_i]$ tienen el mismo número de elementos $\forall i = \overline{1, k}$

   (e) Si k es el número de clases distintas. Demuestre que $G = \cup_{i=1}^{k} [a_i]$

3. Sea $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ un grupo, no necesariamente finito y sean $H, K \preceq G$ (el símbolo $\preceq$ significa "subgrupo de") ambos de índice finito en G. Entonces el subgrupo $H \cap K$ también tiene índice finito en G.

4. Sea $G =< \mathbb{Z}_{35}, \oplus, \sim, 0 >$ el grupo aditivo de los enteros módulo 35.

   (a) Usando el teorema de Lagrange, indique cuál es el tamaño de los posibles subgrupos y por qué.

   (b) Escriba **todos** los subgrupos de G e indique cuáles son cíclicos. Justifique.

   (c) **Para el grupo no trivial de menor tamaño**, escriba todas las clases laterales derechas distintas de dicho subgrupo.

   (d) Diga cuáles son los elementos generadores y los elementos **no** generadores del grupo. Justifique.

5. Sea $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus \ \rangle$ (este grupo es isomorfo al grupo aditivo de los enteros módulo 6) donde $\oplus$ se define como

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \oplus \left\langle \overline{c}, \overline{d} \right\rangle = \left\langle \overline{a} \oplus_2 \overline{c}, \overline{b} \oplus_3 \overline{d} \right\rangle$$

(a) Halle un homomorfismo entre $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus \rangle$ y $\mathbb{Z}_6$

(b) Indique el elemento identidad de G.

(c) Indique la forma del elemento inverso de $\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \in G$

6. Sea $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus \rangle$ (este grupo es isomorfo al grupo aditivo de los enteros módulo 6) donde $\oplus$ se define como

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \oplus \left\langle \overline{c}, \overline{d} \right\rangle = \left\langle \overline{a} \oplus_2 \overline{c}, \overline{b} \oplus_3 \overline{d} \right\rangle$$

   (a) Halle un homomorfismo entre $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus \rangle$ y $\mathbb{Z}_6$

   (b) Indique el elemento identidad de G.

   (c) Indique la forma del elemento inverso de $\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \in G$

7. Halle el grupo de simetrías de un pentágono regular.

   (a) Indique el tamaño de los posibles subgrupos.

   (b) Dé explícitamente un subgrupo de cada tamaño.

   (c) Para el subgrupo no trivial de menor tamaño, halle las clases laterales izquierdas e indique el índice de ese subgrupo en el grupo.

8. Halle el grupo de simetrías de un Hexágono regular.

   (a) Indique el tamaño de los posibles subgrupos.

   (b) Dé explícitamente un subgrupo de cada tamaño.

   (c) Para el subgrupo no trivial de menor tamaño, halle las clases laterales izquierdas e indique el índice de ese subgrupo en el grupo.

9. Encuentre el orden de cada elemento del grupo de simetrías de (a) el triángulo equilátero, y (b) el cuadrado.